الفصل الثالث

الحركة الدورانية (Rotational Movement)

((3))

الفصل الثالث

(Rotational Movement) الحركة الدورانية

1-3 المقدمة (Introduction)

ترجع أهمية دراسة الحركة الدورانية للأجسام نظرا لوجود مثل هذه الحركة في الطبيعة كحركة الأجرام السماوية (الكواكب والنجوم) في مسارات دائرية تقريبا ، وكذلك حركة الإلكترونات حول الأنوية في الذرات .

في البداية سنتعرّف على متغيّرات (Variables) الحركة الدورانية ، ومن ثم سندرس معادلات هذه الحركة بسرعة زاوية (Angular Velocity) ثابتة وبتعجيل زاوي (Angular Acceleration) ثابت كما كان الحال في دراسة الحركة الخطية ، ومن ثم ندرس العلاقة بين متغيّرات الحركة الدورانية والخطية .

2-3 متغيّرات الحركة الدورانية (Variables of Rotational Motion)

عند دراسة الحركة الخطية تطرقنا إلى متغيرات هذه الحركة وهي الإزاحة ، السرعة والتعجيل ، وبالمثل فإنه عند وصف الحركة الدورانية فإننا سوف نستخدم المفاهيم وهي الإزاحة الزاوية (Angular Displacement) و السرعة الزاوية (Angular Velocity) والتعجيل الزاوي (Angular Acceleration) .

1-2-3 الإزاحة الزاوية (Angular Displacement)

إذا تحرّك جسم حول محور ثابت من النقطة ($\vec{\theta}_o$) إلى النقطة ($\vec{\theta}$) فالمتجه الواصل بينهما يسمى بالإزاحة الزاوية (Angular Displacement) ويُرمز لها ($\Delta\vec{\theta}$) وهي كمية متجهة ، ومقدارها تساوي :

$$\boxed{\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta} - \vec{\theta}_o \, Radian(rad) ...(1-3)}$$

إن وحدة الإزاحة الزاوية تسمى (الراديان – Radian – نصف قطرية) وتختصر (rad) ، حيث أن :

$$\boxed{\pi.(rad) = 180^\circ ...(2-3)}$$

وعليه فإن :

$$1rad \approx 57^\circ$$

2-2-3 السرعة الزاوية (Angular Velocity)

تُعرّف السرعة الزاوية ($\vec{\omega}$) عندما يدور الجسم ويقطع إزاحة زاوية ($\Delta\vec{\theta}$) من ($\vec{\theta}_\circ$) إلى ($\vec{\theta}$) خلال فترة زمنية (Δt) من (t_o) إلى (t) ، أي أنها النسبة بين تغيّر الإزاحة الزاوية والتغيّر في الزمن ، وتُقاس السرعة الزاوية بوحدة (rad/s) :

$$\vec{\omega}_{av} = \frac{(\vec{\theta}-\vec{\theta}_\circ)}{(t-t_\circ)} = \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t}(rad/s) \ldots (3-3)$$

أما السرعة الزاوية اللحظية (Instantaneous Angular Velocity) فهي السرعة الزاوية الناتجة عند لحظة زمنية قصيرة (dt) :

$$\vec{\omega}_{in} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \ldots (4-3)$$

3-2-3 التعجيل الزاوي (Angular Acceleration)

بنفس الطريقة إذا كانت سرعة الجسم الزاوية عند النقطة ($\vec{\theta}_\circ$) هي ($\vec{\omega}_o$) وسرعته الزاوية عند النقطة ($\vec{\theta}$) هي ($\vec{\omega}$) فإن التعجيل الزاوي في هذه الحالة تساوي :

$$\vec{\alpha}_{av} = \frac{(\vec{\omega}-\vec{\omega}_\circ)}{(t-t_\circ)} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}(rad/s^2) \ldots (5-3)$$

أما التعجيل الزاوي اللحظي (Instantaneous Angular Acceleration) فهو التعجيل الزاوي الناتج عند لحظة زمنية قصيرة (dt) .

$$\vec{\alpha}_{in} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\theta}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2} \ldots (6-3)$$

3-3 أنواع الحركة الدورانية الخاصة (Types of Special Rotational Motion)

3-3-1 الحركة الدورانية بسرعة زاوية ثابتة

(Rotational Movement With Constant Angular Velocity)

عندما يكون الجسم في حركة ذات سرعة منتظمة حول محور ثابت تكون سرعته الزاوية ثابتة ، أي أن :

$$\vec{\omega} = cons\tan t$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \Rightarrow \vec{\omega}dt = d\vec{\theta}$$

$$\int_{\theta_\circ}^{\theta} d\vec{\theta} = \int_{t_\circ}^{t} \vec{\omega}dt = \vec{\omega}\int_{t_\circ}^{t} dt$$

$$\boxed{\vec{\theta} - \vec{\theta}_\circ = \overline{\omega}(t - t_\circ)...(7-3)}$$

عندما $t_o = 0$ تصبح المعادلة (3- 7) كالآتي :

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \vec{\omega}t...(8-3)}$$

عندما $\vec{\theta}_o = 0$ تصبح المعادلة (3- 8) كالآتي :

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\omega}t...(9-3)}$$

3-3-2 الحركة الدورانية بتعجيل زاوي ثابت

(Rotational Movement With Constant Angular Acceleration)

عندما يتحرّك الجسم بسرعة زاوية $(\vec{\omega})$ متغيّرة ، فإن الجسم سوف يتحرّك بتعجيل زاوي $(\vec{\alpha})$ الذي يعرّف بكونه معدّل تغيّر السرعة الزاوية في وحدة الزمن أي أن :

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow d\vec{\omega} = \vec{\alpha}dt \ldots(10-3)}$$

$$\int_{\omega_\circ}^{\omega} d\vec{\omega} = \int_{t_\circ}^{t} \vec{\alpha}dt$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega}_\circ = \vec{\alpha}(t - t_\circ) \ldots(11-3)}$$

عندما $t_o = 0$ تصبح المعادلة (3- 11) كالآتي :

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_\circ + \vec{\alpha}t \ldots(12-3)}$$

$$\because \vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \vec{\omega}t \ldots(8-3)$$

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \int_{t_\circ}^{t} \vec{\omega}dt$$

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \int_{t_\circ}^{t} [\vec{\omega}_\circ + \vec{\alpha}(t - t_\circ)]dt$$

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \vec{\omega}_\circ(t - t_\circ) + \frac{1}{2}\vec{\alpha}(t - t_\circ)^2 \ldots(13-3)}$$

عندما $t_o = 0$ تصبح المعادلة (3- 13) كالآتي :

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\theta}_\circ + \vec{\omega}_\circ t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 \ldots(14-3)}$$

عندما $\vec{\theta}_o = 0$:

$$\boxed{\vec{\theta} = \vec{\omega}_\circ t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 \ldots(15-3)}$$

وكما نعلم أن :

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_\circ}{t - t_o}$$

$$\boxed{t = \frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_\circ}{\vec{\alpha}} \ldots(16-3)}$$

نعوّض قيمة (t) في المعادلة (3 – 15) فنحصل على :

$$\vec{\theta} = \frac{\vec{\omega}^2 - \vec{\omega}_\circ^{\,2}}{2\vec{\alpha}}$$

ومنها نحصل على :

$$\boxed{\vec{\omega}^2 = \vec{\omega}_\circ^{\,2} + 2\vec{\alpha}\vec{\theta} \ldots(17-3)}$$

مثال 3 – 1 : بدأ محرك كهربائي دورانه من السكون بسرعة زاوية مقدارها ($36rad/s$) أثناء فترة زمنية مقدارها ($6s$) إحسب :

1- التعجيل الزاوي للمحرك ؟

2- الإزاحة الزاوية التي يقطعها المحرك ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

المعطيات / $\vec{\omega}_o = 0$ ، $t_o = 0$ ، $\vec{\omega} = 36rad/s$ ، $t = 6s$

المجاهيل / $\vec{\alpha} = ?$ ، $\vec{\theta} = ?$

1 - من المعادلة ($3-12$) :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\circ + \vec{\alpha}t ...(12-3)$$

$$36 = 0 + \vec{\alpha}6 \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{36}{6}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\alpha} = 6rad/s^2}$$

2 - من المعادلة ($3-15$) :

$$\vec{\theta} = \vec{\omega}_\circ t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 ...(15-3)$$

$$\vec{\theta} = (0)(6) + \frac{1}{2}(6)(6)^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\theta} = 108rad}$$

3-4 العلاقة بين متغيرات الحركة الدورانية والخطية

(Relation between Variables of Linear and Rotational Motion)

إذا تحرّك جسم من نقطة (**A**) إلى نقطة (**B**) وقطع قوسا طوله (**s**) على محيط الدائرة نصف قطرها (**R**) وكما مُبيّن في الشكل (3 – 1) ، فالزاوية التي تقابل القوس تسمى بالإزاحة الزاوية ويرمز لها بالرمز ($\vec{\theta}$) وتمثّل نسبة طول القوس إلى نصف قطر هذه الدائرة ، أي أن :

$$\boxed{\vec{\theta} = \frac{s}{R} \ldots (18-3)}$$

ومنها :

$$\boxed{s = R\vec{\theta} \ldots (19-3)}$$

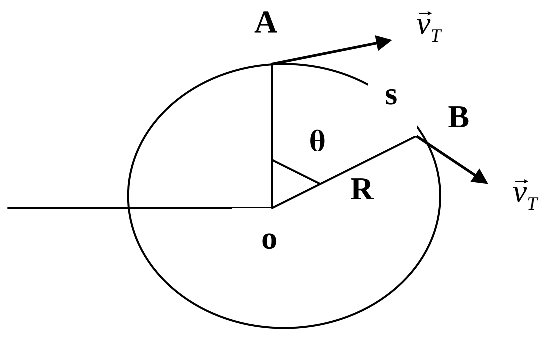
حيث أن :

s: طول القوس ، ولدورة الكاملة $s = 2\pi R$.

R : نصف قطر الدائرة .

$\vec{\theta}$: الإزاحة الزاوية ، والإزاحة الزاوية لدورة كاملة تساوي $\vec{\theta} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi rad$ ، وأيضا $\vec{\theta} = n.2\pi$

حيث (n) تمثّل عدد الدورات (Number of Revolutions) .



شكل (3 – 1) : حركة جسم على محيط دائرة

إذا أخذنا المشتقة بالنسبة للزمن بالنسبة للمعادلة (3 − 19) ينتج :

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

حيث أن ($\frac{ds}{dt}$) هي قيمة السرعة الخطية والتي تكون مماسية لمحيط الدائرة وسنرمز لها بالرمز ($\vec{v}_T$) ،

أما المقدار ($\frac{d\vec{\theta}}{dt}$) فهي قيمة السرعة الزاوية ($\vec{\omega}$) ، أي أن :

$$\boxed{\vec{v}_T = R\vec{\omega}...(20-3)}$$

إذا أخذنا المشتقة بالنسبة للزمن للمعادلة (3 − 20) ينتج :

$$\frac{d\vec{v}_T}{dt} = R\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

حيث أن ($\frac{d\vec{v}_T}{dt}$) يمثّل التعجيل الخطي المماسي ($\vec{a}_T$) أما المقدار ($\frac{d\vec{\omega}}{dt}$) فإنه يمثّل التعجيل الزاوي ($\vec{\alpha}$)، أي أن :

$$\boxed{\vec{a}_T = R\vec{\alpha}...(21-3)}$$

إن التعجيل الزاوي ($\vec{\alpha}$) يساوي صفرا إذا كان إنطلاق الجسم على محيط الدائرة ثابت المقدار وهذا يعني أن التعجيل الزاوي ينتج عن التغيّر في مقدار سرعة الجسم .

ومن البديهي أن إتجاه السرعة في الحركة الدائرية يتغيّر من نقطة إلى أخرى وتغيّر الإتجاه ينتج عنه تعجيل آخر هو التعجيل المركزي ($\vec{a}_c$) ، يتجه نحو مركز الدائرة وعمودي على متجه السرعة المماسية :

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{\vec{v}^2}{R} = \vec{\omega}^2 R...(22-3)}$$

في الحالة التي لا يكون فيها الإنطلاق ثابتا (السرعة متغيّرة) فإن الجسم الدائري في دائرة يتأثر بتعجيلين ، أولهما تعجيل مماسي ($\vec{a}_T$) (Tangential Acceleration) موازي لمتجه السرعة المماسية والذي ينتج عن حدوث تغير في مقدار سرعة الجسم ، والآخر تعجيل مركزي ($\vec{a}_c$) (Centripetal Acceleration) عمودي على متجه السرعة المماسية ، والذي ينتج عن حدوث تغير في إتجاه سرعة الجسم ، وأن تعجيل الجسم في هذه الحالة هو محصلة التعجيلين (المماسي والمركزي) :

$$\boxed{\vec{a} = \sqrt{(\vec{a}_T)^2 + (\vec{a}_c)^2} \ldots (23-3)}$$

ويعمل مع المماس الزاوية (θ) :

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{\vec{a}_c}{\vec{a}_T} \ldots (24-3)}$$

ملاحظة عامة : الجدول التالي يبين المقابلة بين متغيّرات الحركتين الخطية والدورانية :

نوع الحركة / المتغيّر	الحركة الخطية	الحركة الدورانية
الإزاحة	$\vec{x}(m)$	$\vec{\theta}(rad)$
السرعة	$\vec{v}(m/s)$	$\vec{\omega}(rad/s)$
التعجيل	$\vec{a}(m/s^2)$	$\vec{\alpha}(rad/s^2)$

مثـال 3 – 2 : يـدور قـرص بسـرعة ($8.16 rad/s$) ثـم يأخـذ بالتبـاطؤ إلـى أن يتوقـف بعـد (6 دورات) ،

أوجد قيمة التعجيل الزاوي ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

المعطيات / $\vec{\omega}_o = 8.16 rad/s$ ، $\vec{\omega} = 0$ ، $n = 6 rev$

المجاهيل / $\vec{\alpha} = ?$

من المعادلة (3 – 17) :

$$\vec{\omega}^2 = \vec{\omega}_\circ^{\,2} + 2\vec{\alpha}\theta ...(17-3)$$

$$(0)^2 = (8.16)^2 + 2\vec{\alpha}(6x2\pi)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{-(8.16)^2}{24\pi}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\alpha} = -0.884 rad/s^2}$$

يلاحظ الإشارة (–) كدليل على أن التعجيل تباطأ .

مثال 3 – 3 : بدأ محرك كهربائي دورانه من السكون وبلغت سرعته الزاوية (1200 دورة في الدقيقة)

بعد مضي (10 ثواني) ، إحسب :

1- مقدار التعجيل الزاوي للمحرك ؟

2- الإزاحة الزاوية للمحرك ؟

3- عدد الدورات الكلية للمحرك ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

المعطيات / $\vec{\omega}_o = 0$ ، $t_o = 0$ ، $\vec{\omega} = 1200 rev/\min$ ، $t = 10s$

المجاهيل / $\vec{\alpha} = ?$ ، $\vec{\theta} = ?$ ، $n = ?$

$$\vec{\omega} = \frac{(numberofcycles)x(2\pi)}{t} \frac{rad}{s}$$

$$\vec{\omega} = 1200 \frac{2\pi}{60}$$

$$\boxed{\therefore \vec{\omega} = 40\pi \frac{rad}{s}}$$

1 - من المعادلة (12 − 3) :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\circ + \vec{\alpha}t \ldots (12-3)$$

$$40\pi = (0) + \vec{\alpha}(10) \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{40\pi}{10}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\alpha} = 4\pi \frac{rad}{s^2}}$$

2 - من المعادلة (15 − 3) :

$$\vec{\theta} = \vec{\omega}_\circ t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 \ldots (15-3)$$

$$\vec{\theta} = (0)(10) + \frac{1}{2}(4\pi)(10)^2 \Rightarrow \vec{\theta} = \frac{1}{2}(4\pi)(100)$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\theta} = 200\pi rad}$$

3 - عدد الدورات الكلية :

$$n = \frac{\vec{\theta}}{2\pi} \quad \Rightarrow n = \frac{200\pi}{2\pi}$$

$$\boxed{\therefore n = 100 revolutions}$$

مثال 3 – 4 : يدور دولاب بسرعة زاوية قدرها $(30rev/s)$ يتم إيقافه بتعجيل تباطئي ثابت حيث يدور

الدولاب $(60rev)$ قبل أن يتوقف تماما ، أوجد :

1– التعجيل الزاوي للدولاب ؟

2– المدة الزمنية المنقضية حتى توقف الدولاب ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

المعطيات / $\vec{\omega}_o = 30rev/s$ ، $\vec{\omega} = 0$ ، $n = 60rev$

المجاهيل / $\vec{\alpha} = ?$ ، $t_o = ?$

$$\vec{\omega} = \frac{(numberofcycles)x(2\pi)}{t}\frac{rad}{s}$$

$$\Rightarrow \ \vec{\omega}_\circ = (30)(2\pi)\frac{rad}{s}$$

$$\vec{\omega}_\circ = 60\pi\,\frac{rad}{s}$$

1 - لإيجاد التعجيل الزاوي للدولاب :

من المعادلة (3 − 17) :

$$\vec{\omega}^2 = \vec{\omega}_\circ^{\,2} + 2\vec{\alpha}\vec{\theta} \ldots (17-3)$$

$$(0)^2 = (60\pi)^2 + 2\vec{\alpha}(2\pi)(60)$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{-(60\pi)^2}{2(2\pi)(60)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\alpha} = -47\frac{rad}{s^2}}$$

2 - لإيجاد المدة الزمنية المنقضية حتى توقف الدولاب :

من المعادلة (3 − 11) :

$$\vec{\omega} - \vec{\omega}_\circ = \vec{\alpha}(t - t_\circ) \ldots (11-3)$$

$$(0) - (30)(2\pi) = (-47)(0 - t_\circ)$$

$$-60\pi = -47t_o \Rightarrow t_o = \frac{-60\pi}{-47}$$

$$\boxed{\Rightarrow t_o = 4s}$$

مثال 3 - 5 : يبدأ جسم بالحركة من السكون على مسار دائري وإزدادت سرعته بإنتظام حتى وصلت (900 دورة في الدقيقة) خلال (15 ثانية) ، أوجد :

1- التعجيل الزاوي للجسم ؟

2- التعجيل الخطي المماسي للجسم إذا كان نصف قطرمساره (0.2 متر) ؟

3- عدد الدورات التي يدورها ذلك الجسم خلال تلك الفترة ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

المعطيات / $\vec{\omega}_o = 0$ ، $t_o = 0$ ، $\vec{\omega} = 900 rev/\min$ ، $t = 15\sec$ ، $R = 0.2m$

المجاهيل / $\vec{\alpha} = ?$ ، $\vec{a}_T = ?$ ، $n = ?$

$$\vec{\omega} = \frac{(numberofcycles)x(2\pi)}{t} \frac{rad}{s}$$

$$\vec{\omega} = \frac{(900)x(2\pi)}{60}$$

$$\boxed{\therefore \vec{\omega} = 30\pi \frac{rad}{s}}$$

1 - التعجيل الزاوي للجسم :

$$\vec{\alpha}_{av} = \frac{(\vec{\omega} - \vec{\omega}_\circ)}{(t - t_\circ)} \ldots (5-3)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{(\vec{\omega} - \omega_o)}{t} = \frac{30\pi - 0}{15}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} = 2\pi \frac{rad}{s^2}}$$

2 – التعجيل الخطي المماسي للجسم :

من المعادلة (3 – 21) :

$$\vec{a}_T = R\vec{\alpha}...(21-3)$$

$$\vec{a}_T = (0.2)x(2\pi)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_T = 0.4\pi \frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{\therefore \vec{a}_T = 1.256 \frac{m}{s^2}}$$

3 – عدد الدورات التي يدورها الجسم خلال تلك الفترة :

من المعادلة (3 – 15) :

$$\vec{\theta} = \vec{\omega}_\circ t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2...(15-3)$$

$$\vec{\theta} = (0)(15) + \frac{1}{2}(2\pi)(15)^2$$

$$\therefore \vec{\theta} = 225\pi Radian$$

$$\because n = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow n = \frac{225\pi}{2\pi}$$

$$\boxed{\therefore n = 112.5 revolutions}$$

مثال 3 – 6 : دولاب دائري نصف قطره $(0.3m)$ يدور بسرعة إبتدائية مقدارها $(150 rev.\min^{-1})$ ،

فإذا نقصت سرعته بإنتظام حتى توقف في زمن مقداره $(20s)$. أوجد :

1– التعجيل الزاوي للدولاب الدائري ؟

2– الإزاحة الزاوية التي تحرّكها الدولاب حتى توقف ؟

3– التعجيل العمودي (المركزي) لنقطة عند حافة الدولاب بعد ثانيتين من بدء الحركة ؟

4– التعجيل المماسي (الخطي) لنقطة عند حافة الدولاب ؟

5– محصلة التعجيليين العمودي والمماسي ؟

الحل :

قبل البدء بحل المثال يتم كتابة المعطيات والمجاهيل الواردة في منطوق المثال .

المعطيات / $R = 0.3m$ ، $\vec{\omega}_o = 150 rev/\min$ ، $t_o = 0$ ، $\vec{\omega} = 0$ ، $t = 20s$

المجاهيل / $\vec{\alpha} = ?$ ، $\vec{\theta} = ?$ ، $\vec{a}_c = ?$ ، $\vec{a}_T = ?$ ، $\vec{a} = ?$

$$\vec{\omega}_o = \frac{(number of cycles) x (2\pi)}{t} \frac{rad}{s}$$

$$\vec{\omega}_o = \frac{(150) x (2\pi)}{60}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\omega}_o = 5\pi \frac{rad}{s}}$$

1 - لإيجاد التعجيل الزاوي للدولاب الدائري :

من المعادلة (3 – 12) :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\circ + \vec{\alpha}t \ldots (12-3)$$

$$0 = (5\pi) + \vec{\alpha}(20) \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{5\pi}{20}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{\pi}{4}\frac{rad}{s^2}}$$

2 - لإيجاد الإزاحة الزاوية التي تُحرّكها الدولاب حتى توقف :

من المعادلة (3 – 17) :

$$\vec{\omega}^2 = \vec{\omega}_\circ{}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\theta} \ldots (17-3)$$

$$(0)^2 = (5\pi)^2 + 2(-\frac{\pi}{4})\vec{\theta}$$

$$0 = 25.\pi^2 - \frac{\pi}{2}\vec{\theta} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\pi}{2}\vec{\theta} = 25.\pi^2$$

$$\boxed{\vec{\theta} = 50\pi rad}$$

3 - لإيجاد التعجيل العمودي (المركزي) لنقطة عند حافة الدولاب بعد ثانيتين من بدء الحركة :

من المعادلة (22 − 3) :

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{v}^2}{R} = \vec{\omega}^2 R \ldots (22-3)$$

من المعادلة (12 − 3) :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\circ + \vec{\alpha} t \ldots (12-3)$$

$$\vec{\omega} = (5\pi) - \frac{\pi}{4}(2)$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = 4.5\pi \frac{rad}{s}$$

$$\vec{a}_c = (4.5\pi)^2 (0.3)$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{a}_c = 60 \frac{m}{s^2}}$$

4 – لإيجاد التعجيل المماسي (الخطي) لنقطة عند حافة الدولاب :

من المعادلة (3 – 21) :

$$\vec{a}_T = R\vec{\alpha} \ldots (21-3)$$

$$\vec{a}_T = (0.3)x(-\frac{\pi}{4})$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{a}_T = -0.24\frac{m}{s^2}}$$

5 – لإيجاد محصلة التعجيليين العمودي والمماسي :

من المعادلة (3 – 23) :

$$\vec{a} = \sqrt{(\vec{a}_T)^2 + (\vec{a}_c)^2} \ldots (23-3)$$

$$\vec{a} = \sqrt{(-0.24)^2 + (60)^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \sqrt{3600.0576}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{a} = 60 m.s^{-2}}$$

مسائل الفصل الثالث
الحركة الدورانية (Rotational Movement)
((3))

س1 : إذا تم دولاب دوّار (40 دورة) حتى توقف نهائيا حيث كانت سرعته الإبتدائية ($1.5rad.s^{-1}$) ، فإذا إعتبرنا التعجيل الزاوي ثابت . إحسب الزمن الذي إستغرقه الدولاب حتى توقف ؟

الإجابة: $\boxed{t = 334.9s}$

س2 : مروحة تدور بمعدل $(900\,RevolutionPerMinute(rpm))$. إحسب :

1- السرعة الزاوية لأي نقطة على إحدى ريش المروحة ؟

2- السرعة المماسية لحافة الريشة إذا كانت المسافة من المركز إلى الحافة تساوي $(20cm)$ ؟

الإجابة : $\boxed{\vec{w} = 94.2rad/s}$ $\boxed{\vec{v}_T = 18.8m/s}$

س3 : عجلة نصف قطرها $(40cm)$ تدور على محور ثابت وتزيد سرعتها بإنتظام من السكون حتى تصل إلى $(900rpm)$ في زمن مقداره $(20s)$. إحسب :

1- التعجيل الزاوي ؟

2- التعجيل المماسي لنقطة على حافة العجلة ؟

الإجابة : $\boxed{\vec{\alpha} = 4.7rad/s^2}$ $\boxed{\vec{a}_T = 1.9m/s^2}$

س4 : سيارة نصف قطر عجلاتها $(30cm)$ بدأت من السكون وتسارعت بإنتظام حتى بلغت السرعة $(15m/s)$ في زمن مقداره $(8s)$. إحسب :

1- التعجيل الزاوي لعجلات السيارة ؟

2- عدد دورات العجلة الواحدة خلال هذه الفترة الزمنية ؟

الإجابة : $\boxed{\vec{\alpha} = 6.3rad/s^2}$ $\boxed{n = 32rev}$

س5 : إذا كان الموقع الزاوي لنقطة عند حافة دولاب يُعطى بالعلاقة $\theta_{(t)} = 4t - 3t^2 + t^3$ حيث (θ) بالوحدات الدائرية (rad) و (t) بالثواني (s) . إحسب :

1- الإزاحة الزاوية في الفترة بين $(t_1 = 1s)$ و $(t_2 = 3s)$ ؟

2- السرعة الزاوية المتوسطة في نفس الفترة ؟

3- السرعة الزاوية اللحظية عند اللحظة $(t = 2s)$ ؟

4- التعجيل الزاوي المتوسط في الفترة بين $(t_1 = 1s)$ و $(t_2 = 3s)$ ؟

5- التعجيل الزاوي اللحظي عند اللحظة $(t = 2s)$ ؟

الإجابة : $\boxed{\Delta\vec{\theta} = 10rad}$ $\boxed{\vec{w}_{ave} = 5rad.s^{-1}}$ $\boxed{\vec{w}_{(2s)} = 4rad.s^{-1}}$

$\boxed{\vec{\alpha}_{ave} = 6rad.s^{-2}}$ $\boxed{\vec{\alpha}_{(2sec)} = 6rad.s^{-2}}$